Г. И. Просветов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ:

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Москва
Альфа-Пресс
2010

УДК 517(076.2)
ББК 22.16я73
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ: Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2010. — 96 с.

ISBN 978-5-94280-450-3

В учебно-практическом пособии рассмотрены основные методы и приемы функционального анализа. Приведенные в учебном материале примеры и задачи позволяют успешно овладеть знаниями по изучаемой дисциплине.

Пособие содержит программу курса, задачи для самостоятельного решения с ответами и задачи для контрольной работы. Издание рассчитано на преподавателей и студентов высших учебных заведений.

УДК 517(076.2)
ББК 22.16я73

ISBN 978-5-94280-450-3

9 785942 804503

Предисловие

> Вопрос настолько же сложен, насколько занятен, и настолько же прост, насколько может быть понятным.
>
> П. Таранов

В настоящее время существует ряд обстоятельных руководств по функциональному анализу, предназначенных для студентов высших учебных заведений. Но ощущается потребность в пособии, которое на простых и конкретных примерах способно показать читателю со скромной математической подготовкой весь арсенал современных методов функционального анализа. Одна из попыток решить эту задачу — перед вами, уважаемый читатель.

Предлагаемое пособие знакомит читателя с важнейшими разделами функционального анализа и призвано помочь тем, кто осваивает этот курс, особенно в системе заочного и вечернего образования. Как правило, это студенты с довольно скромной математической подготовкой.

Цель этой книги — просто и доходчиво на конкретных примерах изложить людям, которые, возможно, совершенно незнакомы с математической литературой, основные методы и приемы функционального анализа.

В пособии рассмотрены такие темы, как системы множеств, мера, измеримые функции, интеграл Лебега, метрические пространства, нормированные пространства, операторы, гильбертовы пространства, операционное исчисление, преобразование Фурье, интегральные уравнения, обобщенные функции.

Весь материал книги разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится необходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Ответы ко всем задачам помещены в конце книги. Начало и конец доказательства помечены знаками ► и ◄ соответственно. Пособие содержит также программу курса и задачи для контрольной работы.

Конечно, автор прекрасно понимает, что данная книга отражает систему взглядов автора на функциональный анализ, сложившуюся еще в студенческие годы под влиянием таких выдающихся ученых и педагогов, профессоров кафедры ТФФА механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, как А. А. Кириллов, А. Г. Костюченко, Л. А. Балашов, О. Г. Смолянов, П. Л. Ульянов, М. К. Потапов, В. А. Скворцов. К сожалению, кого-то из них уже нет с нами, поэтому книга посвящается их светлой памяти.

Хочется надеяться, что знакомство с книгой будет как приятным, так и полезным.

Автор

Глава 1

МНОЖЕСТВО

Собрание предметов, родственных по некоторому признаку, часто рассматривается как самостоятельный объект.

Пример 1. А, Б, В, Г, ... — алфавит.

Пример 2. 1, 2, 3, 4, ... — натуральные числа.

Пример 3. Кофейник, сахарница, чашки, блюдца — сервиз.

Пример 4. Персонажи басен И. А. Крылова.

Немецкий математик Кантор ввел понятие «*множество*», которое относится к первоначальным понятиям, не подлежащим определению. Чтобы сделать этот термин яснее, с ним сопоставляют такие его синонимы, как «совокупность», «собрание», «набор». Алфавит, натуральные числа, сервиз, персонажи басен И. А. Крылова — это примеры множеств.

Хотя теория множеств получила признание лишь в конце девятнадцатого века, это не помешало множеству стать одним из основных понятий математики. Без символики теории множеств сейчас не обходится ни одно математическое исследование.

Предметы, составляющие множество, называются его *элементами*. Говорят, что они принадлежат множеству. Символически это записывают так: $a \in A$ (элемент a принадлежит множеству A). Будем обозначать множество заглавными буквами (A, B, C, ...), а элементы множеств — маленькими буквами (a, b, c, ...). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Пример 5. Пусть A — множество делителей числа 12. Тогда $2 \in A$, а $5 \notin A$.

Задача 1. Пусть A — множество делителей числа 6. Определить, принадлежат ли множеству A числа 3 и 4.

Если число элементов множества конечно, то множество называют *конечным*, иначе — *бесконечным*.

Пример 6. Множество персонажей басен И. А. Крылова — конечное множество, а натуральные числа — бесконечное множество.

Задача 2. Привести примеры конечных и бесконечных множеств.

Встречаются множества, не содержащие ни одного элемента. Например, множество людей, чей рост составляет 10 метров. Такие множества называют *пустыми* и обозначают символом $\varnothing$.

Существуют разные способы задания множеств. Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов.

Пример 7. Планеты Солнечной системы = {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон}.

Задача 3. Привести примеры задания множества перечислением элементов множества.

Но способ задания множества перечислением всех элементов множества не применим к бесконечным множествам. Разве можно составить список всех натуральных чисел? Да и конечное множество задать списком элементов можно далеко не всегда. Хотя множество всех рыб в океане конечно, перечисление всех элементов такого множества вряд ли возможно.

Задать множество можно также с помощью характеристического признака, по которому устанавливают, принадлежит ли элемент рассматриваемому множеству.

Пример 8. Персонажи басен И. А. Крылова.

Запись $Y = \{x \in X \mid S(x)\}$ означает, что множество Y состоит из элементов $x \in X$, обладающих свойством $S(x)$.

Пример 9. $Y = \{x$ — целое число $\mid x$ делится на $2\}$ — множество четных чисел.

Задача 4. Привести примеры задания множества с помощью характеристического признака.

Множество A называют *подмножеством множества* B $(A \subset B)$, если все элементы из A входят в B.

Пример 10. A — множество четных чисел, B — множество целых чисел, $A \subset B$.

Задача 5. Привести примеры подмножеств.

Два множества называют *равными* $(A = B)$, если они состоят из одних и тех же элементов или являются пустыми множествами.

Пример 11. Множество $A = \{1, 2\}$, множество $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Тогда $A = B$. Ведь оба множества состоят из одних и тех же элементов (1 и 2).

Задача 6. Привести примеры равных множеств.

Существуют следующие операции над множествами:

1) *объединение*: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат хотя бы в одном из множеств A или B;

2) *пересечение*: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат в обоих множествах A, B;

3) *разность*: $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ — элементы нового множества — это элементы множества A, которые не лежат в B;

4) *дополнение множества* A в множестве $U (A \subset U)$: $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \backslash A$.

5) *симметрическая разность* $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Пример 12. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \backslash B = \{1, 6, 7, 8\}$, $\overline{A} = \{4, 5, 9, 10\}$. $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{1, 6, 7, 8\} \cup \{4\} = \{1, 4, 6, 7, 8\}$.

Задача 7. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 3, 5, 6, 9\}$, $B = \{10, 5, 2, 6\}$. Определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\overline{A}$, $A \,\Delta\, B$.

Глава 2

СИСТЕМА МНОЖЕСТВ

Система множеств — это множество, элементами которого являются множества.

Пусть Ω — некоторое множество. Мы будем рассматривать системы таких множеств, каждое из которых является подмножеством множества Ω.

Непустая система множеств S называется *кольцом*, если пересечение $A \cap B$ и симметрическая разность $A \Delta B$ лежат в S для любых A и B из S. Иногда в определении кольца операции $A \cap B$ и $A \Delta B$ заменяют на $A \cup B$ и $A \setminus B$.

Кольцо, в которое входит само множество Ω, называется *алгеброй* подмножеств множества Ω.

Кольцо множеств S называется σ-*кольцом* («сигма-кольцом»), если $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in S$ для любых A_j из S ($j \geqslant 1$). σ-*алгебра* — это σ-кольцо, содержащее множество Ω.

Кольцо множеств S называется δ-*кольцом* («дельта-кольцом»), если $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in S$ для любых A_j из S ($j \geqslant 1$).

Под $\coprod\limits_{j=1} A_j$ будем понимать объединение $\bigcup\limits_{j} A_j$ попарно непересекающихся множеств A_j.

Система множеств S называется *полукольцом*, если
1) пустое множество $\varnothing$ содержится в S;
2) $A \cap B$ лежит в S для любых A и B из S;
3) $A \setminus B = \coprod\limits_{j=1}^{n} C_j$, где $C_j \in S$, для любых A и B из S.

Полукольцо, в которое входит само множество Ω, называется *полуалгеброй*.

Пусть F — система множеств. *Кольцом, порожденным* F, называется минимальное кольцо $S(F)$, содержащее F, то есть кольцо $S(F)$ содержится в любом кольце, которое содержит систему множеств F.

Теорема. Кольцо $S(P)$, порожденное полукольцом P, состоит из конечных объединений вида $\coprod\limits_{j} A_j$, где A_j из P.

Пусть S — алгебра множеств множества Ω. Тогда σ-алгеброй, порожденной S, называется минимальная σ-алгебра, содержащая S.

Литература

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М.: Наука. Физматлит, 1995.

Просветов Г. И. Дискретная математика: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Просветов Г. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Просветов Г. И. Математика в экономике: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2005.

Просветов Г. И. Математика для гуманитариев: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математические методы и модели в экономике: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математический анализ: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Просветов Г. И. Теория функций комплексного переменного: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Просветов Г. И. Уравнения в частных производных: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Сборник задач по математики для втузов. Специальные курсы / под ред. А. В. Ефимова. М.: Наука, 1984.

Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В. С. Владимирова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

Содержание