Г. И. Просветов

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ:

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Москва
Альфа-Пресс
2009

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009. — 168 с.

ISBN 978-5-94280-430-5

В учебно-практическом пособии рассмотрены основные методы оптимизации. Книга содержит как теоретический материал, так и практические примеры и задачи, позволяющие успешно овладеть знаниями по изучаемой дисциплине.

Пособие содержит программу курса, задачи для самостоятельного решения с ответами и задачи для контрольной работы. Издание рассчитано на преподавателей и студентов высших учебных заведений.

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-94280-430-5

9 785942 804305

Предисловие

Никогда не ставьте задачу, решение которой вам неизвестно.

Правило Берке

Ставьте задачи, по которым решения есть только у вас.

Следствие из правила Берке

В связи с запросами техники и экономики методы оптимизации получили в последнее время новый импульс развития. В настоящее время существует ряд обстоятельных руководств по методам оптимизации, предназначенных для студентов высших учебных заведений. Но ощущается потребность в пособии, которое на простых и конкретных примерах способно показать читателю со скромной математической подготовкой весь арсенал современных методов оптимизации. Одна из попыток решить эту задачу — перед вами, уважаемый читатель.

Предлагаемое пособие знакомит читателя с важнейшими разделами методов оптимизации и призвано помочь тем, кто осваивает этот курс, особенно в системе заочного и вечернего образования. Как правило, это студенты с довольно скромной математической подготовкой.

Цель этой книги — просто и доходчиво на конкретных примерах изложить людям, которые, возможно, совершенно незнакомы с математической литературой, основные методы и приемы оптимизации.

В пособии рассмотрены такие темы, как линейное программирование, двойственный симплекс-метод, транспортная задача, задача о назначениях, целочисленное программирование, динамическое программирование, оптимизационные задачи на графах, методы одномерной оптимизации, экстремум функции двух переменных, выпуклые функции, метод спуска, дробно-линейное программирование, многоцелевые задачи, задачи вариационного исчисления, принцип максимума Понтрягина.

Весь материал книги разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится необходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Показано, как с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Excel можно избежать долгих и утомительных вычислений. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения.

Ответы ко всем задачам помещены в конце книги. Пособие содержит также программу курса и задачи для контрольной работы.

За основу пособия принят материал курсов, читаемых автором в Российской академии предпринимательства. Всем студентам, прослушавшим эти курсы, автор выражает благодарность за продуктивную совместную работу.

Автор выражает искреннюю признательность В. М. Трояновскому за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Хочется надеяться, что знакомство с книгой будет как приятным, так и полезным.

Автор

Глава 1

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Программирование — это процесс распределения ресурсов. *Математическое программирование* — это использование математических методов и моделей для решения проблем программирования. Если цель исследования и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в виде линейных взаимосвязей между переменными, то соответствующий раздел математического программирования называется *линейным программированием*.

Пример 1 (*задача об использовании ресурсов*). Предприятие производит 2 вида продукции X и Y. 1 кг X приносит прибыль 5 рублей, требует 2 кг ресурса A и 3 кг ресурса B. 1 кг Y приносит прибыль 10 рублей, требует 7 кг ресурса A и 9 кг ресурса B. Суммарный запас ресурсов 70 кг (A) и 50 кг (B). При каком объеме производства прибыль будет максимальна?

Пусть предприятие производит x кг продукции X и y кг продукции Y. Тогда общая прибыль $F = 5x + 10y$ (целевая функция). Мы хотим найти максимум целевой функции при ограничениях $2x + 7y \leqslant 70$ (ресурс A) и $3x + 9y \leqslant 50$ (ресурс B). Конечно, $x, y \geqslant 0$. Получаем задачу: $F = 5x + 10y \to \max$

$$\begin{cases} 2x + 7y \leqslant 70, \\ 3x + 9y \leqslant 50, \\ x, y \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача 1. Предприятие производит два вида продукции X и Y. 1 кг X приносит прибыль 3 рубля, требует 4 кг ресурса A и 2 кг ресурса B. 1 кг Y приносит прибыль 7 рублей, требует 9 кг ресурса A и 5 кг ресурса B. Суммарный запас ресурсов 80 кг (A) и 72 кг (B). Найти целевую функцию и ограничения этой задачи об использовании ресурсов.

Пример 2 (*задача о диете*). Используются 2 вида продуктов X и Y. 1 кг X стоит 6 рублей, содержит 9 единиц питательного вещества A и 17 единиц питательного вещества B. 1 кг Y стоит 8 рублей, содержит 12 единиц питательного вещества A и 23 единицы питательного вещества B. Необходимый минимум в диете 20 единиц (вещество A) и 30 единиц (вещество B). Составить диету минимальной стоимости.

Пусть используют x кг продукта X и y кг продукта Y. Тогда общая стоимость $Z = 6x + 8y$ (целевая функция). Мы хотим найти минимум целевой функции при ограничениях $9x + 12y \geqslant 20$ (содержание вещества A) и $17x + 23y \geqslant 30$ (содержание вещества B). Конечно, $x, y \geqslant 0$.

Получаем задачу: $Z = 6x + 8y \to \min$

$$\begin{cases} 9x + 12y \geqslant 20, \\ 17x + 23y \geqslant 30, \\ x, y \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача 2. Используются два вида продуктов X и Y. 1 кг X стоит 7 рублей, содержит 5 единиц питательного вещества A и 19 единиц питательного вещества B. 1 кг Y стоит 9 рублей, содержит 17 единиц питательного вещества A и 22 единицы питательного вещества B. Необходимый минимум в диете 25 единиц (вещество A) и 36 единиц (вещество B). Найти целевую функцию и ограничения этой задачи о диете.

Если система ограничений состоит лишь из нестрогих неравенств, то это — *стандартная задача* линейного программирования. Если система ограничений состоит лишь из равенств, то это — *каноническая задача линейного программирования*.

Переход от стандартной задачи к канонической осуществляется добавлением новых неотрицательных переменных (*неосновные переменные*) со знаком «+» для неравенств со знаком «$\leqslant$» и со знаком «–» для неравенств со знаком «$\geqslant$».

Пример 3. $F = 6x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 \geqslant 40, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 30, \\ 13x_1 - 7x_2 \leqslant 3, \\ 7x_1 - 8x_2 \geqslant 4, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Это стандартная задача. Из нее получим каноническую задачу, добавив в 1-е и 4-е неравенства переменные $-x_3$, $-x_6$ и во 2-е и 3-е неравенства переменные x_4, x_5.

$F = 6x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 - x_3 = 40, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 30, \\ 13x_1 - 7x_2 + x_5 = 3, \\ 7x_1 - 8x_2 - x_6 = 4, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Задача 3. $F = 5x_1 + 8x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leqslant 37, \\ 3x_1 - 8x_2 \geqslant 15, \\ 16x_1 + 9x_2 \leqslant 5, \\ 9x_1 - 7x_2 \leqslant 2, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Получить из этой задачи каноническую задачу.

Система ограничений задает *область допустимых решений*, которая является *выпуклым множеством* (вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок).

§ 1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Геометрический метод применяется, если задача линейного программирования содержит только две переменные. Рисуем область допустимых решений и график целевой функции. Сдвигаем график целевой функции параллельным переносом в направлении ее вектора нормали (для задач максимизации) или в противоположном направлении (для задач минимизации). Последняя общая точка сдвинутого графика целевой функции и области допустимых решений и есть решение задачи. Возможно, что график совпадает с одним из отрезков, ограничивающих допустимую область решений. В этом случае решений будет бесконечно много.

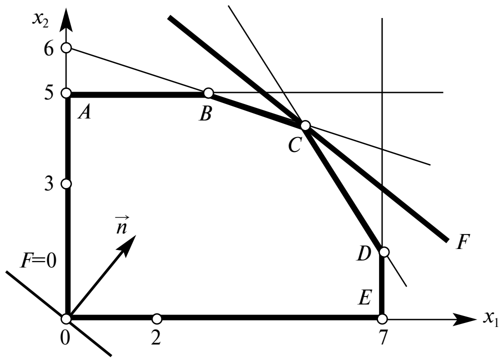
Пример 4. Решим геометрически задачу линейного программирования $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 16, \\ x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \leqslant 7, \\ x_i \leqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Рисуем область допустимых решений. Вместо неравенства $x_1 + 3x_2 \leqslant 18$ рассмотрим прямую $x_1 + 3x_2 = 18$. Изобразим ее график.

Как известно, наша прямая делит плоскость на две полуплоскости. Возьмем в любой из полуплоскостей точку (обычно берут начало координат $O\,(0,0)$) и подставим ее координаты в неравенство $x_1 + 3x_2 \leqslant 18$. Если координаты точки удовлетворяют этому неравенству, то вся полуплоскость, где лежит эта точка, является решением этого неравенства. Если нет, то решением этого неравенства является другая полуплоскость. И т. д. для других ограничений.

Получим область допустимых решений $OABCDE$.



Рисуем прямую $F = 2x_1 + 3x_2 = 0$. Изобразим вектор нормали $n = (2, 3)$ к этой прямой. Его координаты — это коэффициенты целевой функции. Так как у нас задача максимизации, то передвигаем параллельно прямую $F = 2x_1 + 3x_2 = 0$ в направлении n.

Последняя общая точка сдвинутого графика и области допустимых решений $OABCDE$ — это точка C (точка пересечения прямых $x_1 + 3x_2 = 18$ и $2x_1 + x_2 = 16$). Найдем ее координаты.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Тогда максимум целевой функции равен:

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \times 6 + 3 \times 4 = 24.$$

Задача 4. Решить геометрически задачу линейного программирования $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 4, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

§ 1.3. СИМПЛЕКС-МЕТОД (МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННЫХ ЖОРДАНОВЫХ ИСКЛЮЧЕНИЙ — МЖИ)

Приводим задачу к каноническому виду. Для задачи максимизации составляем *симплекс-таблицу*. Если распределение не оптимально, то строим новую симплекс-таблицу по специальным формулам. И т. д. Задача минимизации сводится к задаче максимизации умножением целевой функции на -1.

Пример 5. Решим задачу линейного программирования $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant -2, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant -13, \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 6, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Приведем к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -13, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 6, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Основные переменные x_1, x_2 (входят в целевую функцию), неосновные переменные x_2, x_4, x_5 (введены дополнительно). Выразим неосновные переменные через основные переменные.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2 = x_3, \\ x_1 - 2x_2 + 13 = x_4, \\ -3x_1 + x_2 + 6 = x_5, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу.

	$-x_1$	$-x_2$	b
x_3	1	$\boxed{-1}$	–2
x_4	–1	2	13
x_5	3	–1	6
F	–1	–1	0

В этой таблице собраны коэффициенты при $(-x_1)$, $(-x_2)$ в выражениях для x_3, x_4, x_5, F. Столбец b — это столбец свободных членов. Если последний столбец и последняя строка (кроме правой нижней клетки) не содержат отрицательных чисел, то получен ответ. Иначе проводится МЖИ-операция. Сначала избавляются от минусов в последнем столбце, затем — в последней строке.

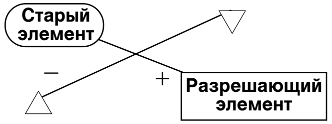
У нас есть минусы в последнем столбце. Выбираем любой отрицательный элемент в последнем столбце. Это –2. Двигаемся по строке, где находится этот выбранный элемент, и берем любой отрицательный элемент в этой строке. Это –1. Смотрим, в каком столбце находится выбранный элемент –1. Во втором. Этот столбец называется *разрешающим*.

Далее поэлементно делим последний столбец на разрешающий столбец и среди положительных конечных отношений берем наименьшее: min {(–2)/(–1), 13/2} = 2. Строку, где достигается этот минимум, назовем *разрешающей*. Это — первая строка.

Элемент на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца назовем *разрешающим*. Это –1. Заключим его в квадрат.

Преобразуем таблицу. В разрешающих строке и столбце переменные меняем местами (это x_2, x_3). На месте разрешающего элемента пишем 1/(разрешающий элемент) = 1/(–1) = –1. В разрешающей строке каждое число делим на разрешающий элемент: 1/(–1) = –1, (–2)/(–1) = 2. В разрешающем столбце каждое число делим на разрешающий элемент и результат берем со знаком «–»: –2/(–1) = 2, –(–1)/(–1) = –1, –(–1)/(–1) = –1. Остальные элементы считаем по правилу прямоугольников:

$$\text{Новый элемент} = \frac{\text{Старый элемент} \times \text{Разрешающий элемент} - \triangle \times \triangledown}{\text{Разрешающий элемент}}.$$



Элемент △ находится в разрешающей строке в одном столбце со старым элементом. Элемент ▽ находится в разрешающем столбце в одной строке со старым элементом.

Для (–1) (клетка (2,1)) новый элемент равен: (клетка (2,1) × клетка (1,2) – клетка (1,1) × клетка (2,2))/клетка (1,2) = ((–1)×(–1) – – 1×2)/(–1) = 1.

Для 13 (клетка (2,3)) новый элемент равен: (клетка (2,3) × клетка (1,2) – клетка (1,3) × клетка (2,2))/клетка (1,2) = (13×(–1) – – 2×(–2))/(–1) = 9. И т. д.

Получим таблицу:

	$-x_1$	$-x_3$	b
x_2	–1	–1	2
x_4	1	2	9
x_5	$\boxed{2}$	–1	8
F	–2	–1	2

Последний столбец не содержит отрицательных чисел. Зато отрицательные числа есть в последней строке. Выбираем любое из них (лучше всего брать большее по модулю). Берем –2. Поэтому первый столбец — разрешающий. Применим МЖИ-операцию (разрешающий элемент обведен). Получим таблицу:

	$-x_5$	$-x_3$	b
x_2	0,5	–1,5	6
x_4	–0,5	$\boxed{2{,}5}$	5
x_1	0,5	–0,5	4
F	1	–2	10

Применим МЖИ-операцию (разрешающий элемент обведен). Получим таблицу:

	$-x_5$	$-x_4$	b
x_2		0,6	9
x_3	–0,2	0,4	2
x_1		0,2	5
F	0,6	0,8	14

Ответ получен. Из 1-го и 4-го столбцов $x_2 = 9$, $x_3 = 2$, $x_1 = 5$. Из 1-й и 5-й строк $F = 14 - 0{,}6x_5 - 0{,}8x_4$.

$F_{\max} = 14$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 9, 2, 0, 0)$.

Ответ: $F_{\max} = 14$, $x_1 = 5$, $x_2 = 9$.

Критерий оптимальности решения при отыскании максимума целевой функции: если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально. У нас это так ($-0{,}6 < 0$, $-0{,}8 < 0$).

Задача 5. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования $F = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 10, \\ -x_1 - x_2 \leqslant -1, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

§ 1.4. EXCEL. ПОИСК РЕШЕНИЯ

В Excel имеется надстройка *Поиск решения*, которая, в частности, помогает решать задачи линейного программирования. Необходимо воспользоваться меню *Сервис* → *Поиск решения*. Если в меню *Сервис* отсутствует команда *Поиск решения*, необходимо выполнить команду *Сервис* → *Надстройки*. Найти элемент *Поиск решения* и поставить «галочку» рядом с ним. Если в окне *Надстройки* нет элемента *Поиск решения*, необходимо доустановить Excel.

Пример 6. Вернемся к примеру 4.
$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 16, \\ x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \leqslant 7, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

	A	B
1	переменные	
2	x_1	0
3	x_2	0
4	целевая функция	
5	$2x_1 + 3x_2$	=2×B2+3×B3
6	ограничения	
7	$x_1 + 3x_2$	=B2+3×B3
8	$2x_1 + x_2$	=2×B2+B3
9	x_1	=B2
10	x_2	=B3

Вводим эти формулы. Выделяем ячейку B5, в которой вычисляется целевая функция. Вызываем *Сервис* → *Поиск решения*. В диалоговом окне в поле ввода *Установить целевую ячейку* уже содержится $B$5. Установим переключатель *Равной максимальному значению*. Щелкнем кнопку *Предположить*, и в поле ввода *Изменяя ячейки* появится $B$2:$B$3. Щелкнем кнопку *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*. В поле ввода *Ссылка на ячейку* укажем $B$7. Правее в выпадающем списке с условными операторами выберем <= (есть условный оператор ЦЕЛ, что позволяет решать задачи целочисленного программирования). В поле ввода *Ограничение* введем 18. Щелкнем кнопку *Добавить* и введем другие ограничения. *OK*. Мы окажемся в диалоговом окне и увидим введенные ограничения. С помощью кнопок *Изменить* и *Удалить* мы можем изменить и удалить ограничение. Щелкнем *Параметры*. Установим два флажка: *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. *OK*. *Выполнить*.

Задача 6. Решить задачу 5 с помощью надстройки *Поиск решения*.

Конечно, компьютеры обрабатывают задачи линейного программирования быстро и точно. Может возникнуть вопрос, зачем нужно уметь решать такие задачи вручную. Но важно понимать, как именно получаются решения. Иначе компьютер — это черный ящик, из которого вдруг появляется решение.

Базовое понимание основного процесса (как в формулировке задач, так и в интерпретации результатов) — это неоспоримое преимущество. И такое понимание достигается, несомненно, умением решать соответствующие задачи без помощи компьютеров. Но на практике предпочтение отдается компьютерному решению задач линейного программирования из-за быстроты и точности этого процесса.

Линейное программирование позволяет найти оптимальные решения в ситуациях с большим количеством предсказуемых переменных и сдерживающих факторов. Оно особенно полезно при поиске оптимальной комбинации материалов, труда и производственных мощностей в ситуации, когда все связи линейны, последствия известны и имеется большое разнообразие возможных комбинаций.

Глава 2

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 2.1. СВОЙСТВА ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Каждой задаче линейного программирования соответствует *двойственная задача*. Если в исходной задаче ищется максимум, то в двойственной задаче ищется минимум, и наоборот.

Коэффициенты целевой функции исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи. Свободные члены системы ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

Число ограничений одной задачи равно числу переменных другой задачи. Целесообразно сразу иметь в исходной задаче максимизации все ограничения вида «не больше» («$\leqslant$»). В двойственной задаче минимизации эти ограничения надо заменить ограничениями «не меньше» («$\geqslant$»). Если на переменную исходной задачи наложено (не наложено) условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи будет в виде неравенства (равенства).

Пример 7. Найдем двойственную задачу для задачи $F = 12x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Приведем все неравенства к виду «$\leqslant$», умножив, где нужно, обе части на (-1).

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant -4, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Составим матрицу задачи, записав коэффициенты ограничений в виде строк. В последней строке укажем коэффициенты целевой функции F.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 12 & 3 & 4 & F \end{pmatrix} = A.$$

Транспонируем эту матрицу (запишем строки в виде столбцов). Получим матрицу двойственной задачи

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & Z \end{pmatrix} = A'.$$

В последней строке находятся коэффициенты целевой функции Z. Так как $F \to \max$, $Z \to \min$. $x_1 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$. Поэтому 1-е и 3-е ограничения двойственной задачи будут в виде неравенств, а 2-е ограничение двойственной задачи — в виде равенства. 1-е и 2-е ограничения исходной задачи заданы в виде неравенств. Поэтому $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$. Получаем: $Z = 1 \times y_1 + (-4) \times y_2 + 3 \times y_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 12, \\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 = 3, \\ y_1 + 3y_2 - 5y_3 \geqslant 4, \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Для этой задачи двойственной будет исходная задача.

Задача 7. Найти двойственную задачу для задачи $F = 5x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \leqslant 10, \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

§ 2.2. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Основное неравенство теории двойственности. Пусть X, Y — допустимые решения исходной задачи и двойственной задачи соответственно (то есть удовлетворяют соответствующим системам ограничений). Тогда $F(X) \leqslant Z(Y)$.

Достаточный признак оптимальности. X, Y — допустимые решения исходной задачи и двойственной задачи соответственно, $F(X) = Z(Y)$. Тогда X, Y — оптимальные решения взаимно двойственных задач.

1-я теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая задача (при этом $F_{max} = Z_{min}$). Если линейная функция одной из взаимно двойственных задач не ограничена (то есть симплекс-метод зацикливается), то условия другой задачи противоречивы.

Теорема. Положительным компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи.

2-я теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

На этой теореме основан *двойственный симплекс-метод.*

Пример 8. Применим двойственный симплекс-метод к примеру 5.

Окончательная симплекс-таблица имела следующий вид

	$-x_5$	$-x_4$	b
x_2		0,6	9
x_3	–0,2	0,4	2
x_1		0,2	5
F	0,6	0,8	14

$F = 14 - 0{,}6x_5 - 0{,}8x_4$. $F_{max} = 14$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 9, 2, 0, 0)$. Основные переменные x_1, x_2 (входят в целевую функцию), неосновные переменные x_3, x_4, x_5.

$F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant -2, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 13, \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 6, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Матрица задачи

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & F \end{pmatrix} = A.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 13 & 6 & Z \end{pmatrix} = A'.$$

Получаем двойственную задачу $Z = -2y_1 + 13y_2 + 6y_3 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 3y_3 \geqslant 1, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \geqslant 1, \\ y_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Основные переменные y_1, y_2, y_3. Установим соответствие между переменными этих задач (основные переменные соответствуют неосновным переменным).

$x_1, x_2; x_3, x_4, x_5$

$y_4, y_5; y_1, y_2, y_3.$

Так как одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая задача (при этом $F_{max} = Z_{min} = 14$). Это 1-я теорема двойственности. Положительным компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач (x_1, x_2, x_3) соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи ($y_4 = y_5 = y_1 = 0$).

Функция $Z = 14 + 5y_4 + 9y_5 + 2y_1$ (мы взяли переменные, значения которых в оптимальном решении равны нулю, с соответствующими коэффициентами). $F = 14 - 0{,}6x_5 - 0{,}8x_4$. Переменным x_4, x_5 соответствуют переменные y_2, y_3. Придадим переменным y_2, y_3 значения 0,8 и 0,6 соответственно (см. 2-ю теорему двойственности). Тогда оптимальное решение двойственной задачи $Y = (0; 0{,}8; 0{,}6; 0; 0)$.

Замечание. Сформулировав двойственную задачу, можно воспользоваться Excel (*Поиск решения*).

Задача 8. Применить двойственный симплекс-метод к задаче 5.

Глава 3

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§ 3.1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Существуют поставщики и потребители некоторого однородного груза. У каждого поставщика имеется определенное количество единиц этого груза (*мощность поставщика*).

Каждому потребителю нужно некоторое количество единиц этого груза (*спрос потребителя*). Известны затраты на перевозку единицы груза от каждого из поставщиков к каждому из потребителей.

Нужно составить такой план перевозок от поставщиков к потребителям, при котором:

1) суммарные затраты на перевозку груза будут минимальны;

2) по возможности будут задействованы все мощности поставщиков;

3) по возможности будет удовлетворен весь спрос потребителей.

Закрытая модель транспортной задачи — это модель, в которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей. В противном случае модель называется *открытой*.

В процессе решения открытая модель всегда сводится к закрытой модели. Поэтому вначале рассмотрим закрытую модель.

Порядок решения для закрытой модели:

1) составляем специальную таблицу;

2) находим первоначальный план поставок (далее будут рассмотрены методы северо-западного угла и минимальной стоимости);

3) оптимизируем его распределительным методом.

§ 3.2. МЕТОД СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА

С помощью этого метода получается первоначальный план поставок.

Пример 9. У поставщиков A_1, A_2, A_3 сосредоточено соответственно 30, 190 и 250 единиц некоторого однородного груза, который необходимо доставить потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 в количестве 70, 120, 150 и 130 единиц. Стоимость перевозок единицы груза от поставщиков к потребителям задается матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Элемент в 1-й строке и 3-м столбце равен 2, то есть стоимость перевозки единицы груза от поставщика A_1 к потребителю B_3 равна 2, и т. д.

Построим первоначальный план поставок методом северо-западного угла.

Суммарная мощность поставщиков равна: 30 + 190 + 250 = 470.

Суммарный спрос потребителей равен: 70 + 120 + 150 + 130 = 470.

Это — закрытая модель. Запишем наши данные в виде специальной таблицы.

	70	**120**	**150**	**130**
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В первом столбце указаны мощности поставщиков, в первой строке — спрос потребителей. Числа в левом верхнем углу клетки — это стоимость перевозок единицы груза от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю, то есть значения из данной в условии матрицы.

План перевозок будет задан, если мы укажем, сколько единиц груза должен получить каждый потребитель от каждого поставщика, то есть если пустая таблица из трех строк и четырех столбцов будет заполнена.

Северо-западный угол таблицы — это ее левый верхний угол, то есть клетка в 1-й строке и 1-м столбце — клетка (1,1). Поэтому рассмотрим 1-го поставщика и 1-го потребителя. У поставщика A_1 есть 30 единиц груза, а потребителю B_1 нужно 70 единиц. Находим минимум из этих двух чисел: min (30,70) = 30. Клетка (1,1) перечеркивается по диагонали сплошной чертой (———), в правом нижнем углу пишется найденный минимум 30. Это означает, что A_1 должен поставить потребителю B_1 30 единиц груза. Такие клетки в дальнейшем будем называть *отмеченными*.

Так как поставщик A_1 израсходовал все свои 30 единиц груза, то мы исключаем его из рассмотрения. Поэтому все остальные клет-

Содержание

ДЛЯ ЗАМЕТОК