Г. И. Просветов

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ
ГУМАНИТАРИЕВ:
ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Москва
Альфа-Пресс
2008

УДК 51(07)
ББК 22.1
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ: Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008. — 320 с.

ISBN 978-5-94280-357-5

В настоящем учебно-методическом пособии для людей, которые по роду занятий профессионально не связаны с математикой, представлены все основные разделы этой фундаментальной науки с целью создания необходимого базиса знаний, без которого даже в гуманитарной области не сможет состояться ни один грамотный и востребованный специалист.

В пособии большое внимание уделено линейной алгебре и геометрии, теории вероятностей и теории статистических исследований, а также математическому анализу, дискретной математике и математической логике.

Для преподавателей и студентов высших учебных заведений.

ISBN 978-5-94280-357-5

УДК 51(07)
ББК 22.1

Предисловие

Математика и опыт — вот подлинные основания достоверного, естественного, разумного живого познания.

Спиноза

Поступая в гуманитарный вуз, абитуриенты и не думали, что придется столкнуться с математикой. Но раз практика потребовала математику, то эту математику нужно изучать. Лет двадцать назад разговоры о математизации знаний вызывали лишь улыбку. Но после обвальной компьютеризации уже никто не подвергает сомнению право на жизнь математических методов в гуманитарных науках.

Первая трудность в изучении математики гуманитариями состоит в том, что изучать математику предстоит тем, кто уже мысленно распрощался с ней после окончания школы и полагал никогда больше с ней не встречаться. Трудность вторая — отсутствие учебников, рассчитанных именно на такую аудиторию.

Программы по математике для студентов гуманитарных и инженерно-технических специальностей существенно различаются. Поэтому все хорошо себя зарекомендовавшие и выдержавшие не одно издание вузовские учебники по математике для студентов инженерно-технических специальностей мало в чем могут помочь в изучении математики студентам гуманитарных специальностей.

Появившиеся на смену «старой гвардии» всевозможные математические учебники для студентов-гуманитариев не выдерживают никакой критики. Либо они и по содержанию, и по объему практически ничем не отличаются от своих предшественников и не учитывают реальные учебные планы обучения (особенно заочников и вечерников). Либо вместо математики в этих учебниках содержится набор научно-популярных текстов на темы «Математика — общеобразовательная дисциплина», «Роль математики в формировании логического мышления», «Математика — теоретическая основа информатики» и т. д. Либо учебники написаны маститыми учеными-гуманитариями, которые хотя и являются в своей области звездами первой величины, но в математике всего лишь самоучки (о чем они даже с некоторой гордостью сообщают в предисловии к своим книгам). Нередко учебники написаны коллективом авторов, поэтому даже внутри одного учебника изложение материала дается по-разному.

Но ведь недаром говорят, что «математика вприглядку не изучается». Поэтому, по мнению автора данного пособия, ощущается потребность в пособии, охватывающем всю математику для студентов гуманитарных специальностей, построенном по единому методологическому принципу и ориентированном на читателя со скромной математической подготовкой. Одна из попыток решить эту задачу перед вами, уважаемый читатель.

Пособие состоит из четырех разделов:

1) линейная алгебра и геометрия;
2) математический анализ;
3) теория вероятностей и математическая статистика;
4) дискретная математика и математическая логика.

В раздел «Линейная алгебра и геометрия» вошли следующие темы: матрицы, определители, системы линейных уравнений, векторы, прямая на плоскости, линейные операторы, линейные пространства, многочлены, собственные векторы, евклидовы пространства.

Раздел «Математический анализ» содержит следующие темы: множество, функция, последовательность, предел функции, непрерывность, производная, неопределенный и определенный интегралы, ряды, дифференциальные уравнения.

В разделе «Теория вероятностей и математическая статистика» рассмотрены темы: основные понятия теории вероятностей, действия с вероятностями, дерево вероятностей, формула Байеса, повторение испытаний, простейший поток событий, относительная частота, дискретные и непрерывные случайные величины, выборочный метод, вариационные ряды, расчет сводных характеристик выборки, доверительные интервалы, испытание гипотез, индексы, линейная регрессия, порядковые испытания, дисперсионный анализ, линейная корреляция.

В разделе «Дискретная математика и математическая логика» представлены комбинаторика, булевы функции, нормальные формы, предикаты, основные понятия теории графов, задача о кратчайшем пути, коммуникационная сеть, правила вывода и получение выводимых суждений, алгоритм.

Каждый раздел разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится необходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. Показано, как с помощью встроенных функций и надстройки «Пакет анализа» пакета Excel можно избежать долгих и утомительных вычислений. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Ответы ко всем задачам помещены в конце соответствующего раздела. Также в конце каждого раздела приведены программа этого раздела и задачи для контрольной работы. Каждый раздел фактически можно рассматривать как самостоятельный курс, методически согласованный с остальными.

Не секрет, что уровень преподавания школьной математики за последние годы неуклонно снижается. И это очень печальный факт. Для ликвидации пробелов в знании школьной программы по математике в предлагаемом пособии напоминаются все нужные сведения из школьной математики.

Конечно, математика не всесильна. Это лишь одна из наук. Но из-за абстрактности своих объектов математика применима в других науках. Математические методы обеспечивают возможность количественных сравнений, краткие символические интерпретации, обоснованность прогнозов и решений. Чем проще методы математической обработки и чем ближе они к реально полученным эмпирическим данным, тем более надежными и осмысленными получаются результаты.

Математика — это обширная и бурно развивающаяся область знаний. Но она далеко не однородна. Многие методы играют служебную роль в самой математике. Широко распространенный в математике аксиоматический подход с тщательным доказательством теорем настолько затемняет простую суть математических объектов и операций, что пробиться к ней не хватает ни терпения, ни сил, ни времени.

Польза от применения математики в гуманитарных науках велика, но и труда на ее освоение нужно много. Зато он окупается сполна.

Конечно, нельзя досконально изучить все рассмотренные в этой книге математические методы впрок, раз и навсегда. Но познакомиться и попытаться их понять нужно. А детали можно уточнить в дальнейшем, когда возникнет в этом необходимость.

За основу пособия принят материал курсов, читаемых автором в Российской академии предпринимательства. Всем студентам, прослушавшим эти курсы, автор выражает благодарность за продуктивную совместную работу. Материал книги использовался автором в 2000—2002 годах в Европейском университете права и Московском социально-экономическом университете.

Автор выражает искреннюю признательность В. М. Трояновскому за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Хочется надеяться, что знакомство с книгой будет как приятным, так и полезным.

Автор

Раздел I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТИЯ

Глава 1

МАТРИЦЫ

Матрицей (точнее *числовой матрицей*) размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Будем обозначать матрицы латинскими буквами A, B, C, ...

Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Каждый элемент a_{ij} имеет два индекса i и j, которые показывают, что элемент находится в i-й строке и j-м столбце. В экономической практике элементами матриц являются вещественные числа.

Пример 1. Элемент a_{12} расположен в 1-й строке и 2-м столбце, а элемент a_{31} находится в 3-й строке и 1-м столбце.

Задача 1. Что можно сказать о расположении элемента a_{24}?

Используют следующие обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}).$$

Пример 2. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер 2×4, так как она содержит 2 строки и 4 столбца. Матрица $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \\ 0{,}5 & 8 \end{pmatrix}$ имеет размер 3×2, так как она содержит 3 строки и 2 столбца.

Задача 2. Привести пример матрицы размер 2×3.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$) называется *квадратной матрицей порядка n*. Иначе матрица называется *прямоугольной*.

Пример 3. Матрицы A и B из примера 2 прямоугольные. Матрица $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ — это квадратная матрица порядка 3. Она содержит 3 строки и 3 столбца.

Задача 3. Привести пример квадратной матрицы второго порядка.

Нулевая матрица — это матрица из одних нулей. Квадратная матрица следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(элементы $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$, на диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0) называется *единичной матрицей порядка n* и обозначается латинской буквой E.

Пример 4. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — это примеры единичных матриц порядков 2 и 3 соответственно.

Задача 4. Как выглядит единичная матрица четвертого порядка?

§ 1.1. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1. *Умножение на число.* При умножении матрицы $A = (a_{ij})$ на число а каждый ее элемент умножается на это число: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

Пример 5. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $2A = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 2\times0 & 2\times4 & 2\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ найти матрицу $5A$.

2. *Сложение.* Это действие применимо только к матрицам одинакового размера. Сумма матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ есть матрица C размера $m \times n$, элементы которой есть сумма соответствующих элементов матриц A и B: $C = A + B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$.

Пример 6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 16 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Размер матриц A и B одинаков (2×3). Матрица $C = A + B =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 16 & 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+8 & 3+10 \\ 7+16 & 5+11 & 9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 13 \\ 23 & 16 & 15 \end{pmatrix}$
также имеет размер 2×3.

Задача 6. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 10 & 17 & 13 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 30 & 18 & 2 \\ 1 & 5 & 19 \end{pmatrix}$.

3. *Вычитание.* Это действие применимо только к матрицам одинакового размера. Разность матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ есть матрица D размера $m \times n$, элементы которой есть разность соответствующих элементов матриц A и B: $D = A - B = (d_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$.

Пример 7. Для матриц A и B из примера 6: $D = A - B =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 16 & 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 & 3-10 \\ 7-16 & 5-11 & 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -7 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Найти разность матриц A и B из задачи 6.

4. *Транспонирование.* Из матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ получается матрица A^t размера $n \times m$ следующим образом: $A^t = (a^t_{ij} = a_{ji})$, то есть надо строки матрицы A записать в виде столбцов.

Пример 8.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 9 \\ 13 & 7 & 18 & 19 \end{pmatrix}$. Тогда $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 18 \\ 4 & 9 & 19 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 4 & 6 & 19 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. *Умножение.* Произведение матриц $A = (a_{is})$ размера $m \times k$ и $B = (b_{sj})$ размера $k \times n$ есть матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}$, то есть для получения элемента c_{ij} нужно i-ю строку матрицы A умножить поэлементно на j-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить. $A_{m\times k}B_{k\times n} = C_{m\times n}$.

Порядок умножения матриц A и B очень важен. Число столбцов (k) 1-го множителя должно равняться числу строк 2-го множителя. Вообще говоря, $AB \neq BA$.

Пример 9. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 11 & 12 & 10 \end{pmatrix}$.

Тогда $A_{2\times 3}B_{3\times 4} = C_{2\times 4} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$.

Для нахождения элемента c_{11} (1-я строка, 1-й столбец) нужно 1-ю строку матрицы A умножить поэлементно на 1-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить: $c_{11} = 1 \times 8 + 2 \times 3 + 3 \times 6 = 32$.

Для нахождения элемента c_{12} (1-я строка, 2-й столбец) нужно 1-ю строку матрицы A умножить поэлементно на 2-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить: $c_{12} = 1 \times 10 + 2 \times 4 + 3 \times 11 = 51$.

Для нахождения элемента c_{21} (2-я строка, 1-й столбец) нужно 2-ю строку матрицы A умножить поэлементно на 1-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить: $c_{21} = 7 \times 8 + 4 \times 3 + 5 \times 6 = 98$. И т. д.

$C = \begin{pmatrix} 32 & 51 & 45 & 35 \\ 98 & 141 & 123 & 65 \end{pmatrix}$.

Произведение же матриц в другом порядке ($B_{3\times 4}A_{2\times 3}$) не существует, так как $4 \neq 2$.

Задача 9. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB, BA.

Пример 10. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 2\times 6 & 1\times 9 + 2\times 7 \\ 3\times 5 + 4\times 6 & 3\times 9 + 4\times 7 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 55 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 46 \\ 27 & 40 \end{pmatrix}$. Мы получили, что $AB \neq BA$.

Задача 10. Привести пример матриц A, B, для которых $AB \neq BA$.

Замечание. Математическая функция *МУМНОЖ* мастера функций f_x пакета Excel позволяет быстро перемножить матрицы. Перед

Просветов Г. И. Цены и ценообразование: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2007.

Просветов Г. И. Эконометрика: Задачи и решения. 5-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Экономика предприятия: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Экономический анализ: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. СПб.: Речь, 2004.

Суходольский Г. В. Математические методы в психологии. Харьков: Гуманитарный Центр, 2004.

Литература

Р а з д е л III.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Д Л Я   З А М Е Т О К